05-03-2018

Κριτήριο συμπύκνωσης κατά Cauchy

$a_k \geq 0$

$a_k \searrow 0$

Η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει $\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} 2^k a_{2^k}$ συγκλίνει

Έστω ότι η $\sum_{k=1}^{\infty} 2^k a_{2^k}$ συγκλίνει Θ.δ.ο. η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει

$t_n = \sum_{k=1}^{n} a_{2^k}$, $m \in \mathbb{N}$, θα φράξουμε το S_m. Σταθεροποιούμε

$(m \in \mathbb{N})$, και βρίσκουμε ένα $n \in \mathbb{N} \Rightarrow 2^n \leq m < 2^{n+1}$

$$\begin{aligned} S_m &= a_1 + a_2 + \dots + a_m \\ &= a_1 + a_2 + \dots + a_{2^n} + a_{2^n+1} + \dots + a_m \\ &\leq a_1 + 2a_2 + \dots + 2^n a_{2^n} \\ &= a_1 + (t_n) \leq a_1 + M \end{aligned}$$

Άσκ 1) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$, $p \in \mathbb{R}$

$p = -1$, $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{-1}} \Rightarrow \sum k$, $S_n = 1 + 2 + \dots \to +\infty$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p} \sim \sum_{k=1}^{\infty} 2^k \frac{1}{(2^k)^{p-1}} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^k = \sum_{k=1}^{\infty} x^k$$

$$x = \frac{1}{2^{p-1}}$$

$\sum x^k$, συγκλίνει αν και μόνο αν $|x| < 1$

$$|x| = \frac{1}{2^{p-1}} < 1 \Leftrightarrow 2^{p-1} > 1 = 2^0 \Leftrightarrow p - 1 > 0 \Leftrightarrow \boxed{p > 1}$$

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k[\log(k)]^p} \overset{p>0}{\sim} \sum 2^k a_{2^k} = \sum 2^k \frac{1}{2^k[\log(2^k)]^p}$$

$$\left\{ a_k = \frac{1}{k[\log(k)]^p} > 0 \right\} \quad = \sum \frac{1}{k[\log 2]^p} = \frac{1}{[\log 2]^p} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^p},$$

η σειρά συγκλίνει μόνο όταν $p>1$

Κριτήριο Σύγκρισης.

$0 \le a_k \le M b_k$, $\forall k = 1, 2, \ldots$ $M>0$ και η σειρά $\sum b_k$ συγκλίνει $\Rightarrow \sum a_k$ συγκλίνει, αν $\sum b_k$ αποκλίνει $\Rightarrow$ $\sum a_k$ αποκλίνει.

Έστω ότι η $\sum b_k$ συγκλίνει $\Rightarrow$ Αν $t_n = \sum_{k=1}^{n} b_k$, $n \in \mathbb{N}$ και $\exists M_1 > 0$ $b_n \le M_1$, $n \in \mathbb{N}$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \le \sum_{k=1}^{n} (M b_k) - M t_n \le M \cdot M_1 \Rightarrow \sum a_k \text{ συγκλίνει}$$

(αφού $a_k > 0$)

Αν $\sum a_k$ συγκλίνει και $a_k \ge 0$ $\sum a_k^2$ συγκλίνει

$|a_k| \le 1$, $\forall k \ge k_0$

$0 < a_k^2 = a_k \cdot a_k < 1 \cdot a_k$

$\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2$ συγκλίνει.

$$\sum \frac{a_k}{1+k^2 a_k}, \quad a_k \ge 0 \quad (\forall k \in \mathbb{N})$$

$$b_k = \frac{a_k}{1+k^2 a_k} \le \frac{a_k}{k^2 a_k} = \frac{1}{k^2}, \text{ η σειρά } \sum \frac{1}{k^2} \text{ συγκλίνει} \Rightarrow$$

Scanned by CamScanner

$\Rightarrow \sum b_k$ συγκλίνει

i) $a_k = 0 \Rightarrow b_k = 0$
ii) $a_k > 0$

Οριακό κριτήριο σύγκρισης.

$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$, a_k, $b_k > 0$ ώστε $\exists \lim \frac{a_k}{b_k}$

Αν $\sum_k b_k$ συγκλίνει $\rightarrow \sum a_k$ συγκλίνει.

$\sum \frac{k}{k^3 - k^2 - 7}$ τότε $b_k = \frac{1}{k^2}$: $\lim \frac{a_k}{b_k} \rightarrow \ell$

Απόδειξη: $\left(\frac{a_k}{b_k}\right)_k$ φραγμένη $\Rightarrow \exists\, M > 0 : \frac{a_k}{b_k} \leq M$

$\rightarrow 0 < a_k \leq M b_k$, $\sum b_k$ συγκλίνει $\Rightarrow \sum a_k$ συγκλίνει

$\sum \frac{1}{k^p - k^q}$, $p > q > 0$ Για ποιές τιμές p, q συγκλίνει;

$\sum a_k$, $\sum b_k$, a_k, $b_k > 0$ $\lim \frac{a_k}{b_k} = \ell$, $\ell \in \mathbb{R}^+ = (0, +\infty)$

Συμπέρασμα $\sum a_k$ συγκλίνει $\Leftrightarrow \sum b_k$ συγκλίνει.

$\sum \frac{1}{k^p} \sim \sum \frac{1}{k^p - k^q}$

$$\frac{a_k}{b_k} = \frac{\frac{1}{k^p - k^q}}{\frac{1}{k^p}} = \frac{k^p}{k^p - k^q} = 1 - k^{p-q} \rightarrow 1 - 0 \in (0, +\infty)$$

$$\sum_{\kappa=1}^{\infty} \frac{\sin(\kappa x)}{\kappa^2}, \; x \in \mathbb{R}$$

$$0 < \left| \frac{\sin(\kappa x)}{\kappa^2} \right| \leq \frac{1}{\kappa^2}$$

$\sum_{\kappa=1}^{\infty} \left| \frac{\sin(\kappa x)}{\kappa^2} \right|$ συγκλίνει. Άρα $\sum_{\kappa=1}^{\infty} \frac{\sin(\kappa x)}{\kappa^2}$ συγκλίνει.

$$\sum_{\kappa=1}^{\infty} \frac{\kappa-7}{\kappa^2-2\kappa+1} \sim \sum_{\kappa=8}^{+\infty} \frac{\kappa-7}{\kappa^2-2\kappa+1}$$

$b_\kappa = \frac{1}{\kappa}$: $\frac{a_\kappa}{b_\kappa} \to 1 \in \mathbb{R}$

$a_\kappa \geq 0$
και η $\sum a_\kappa$ συγκλίνει $\Big\}$ $\sum_{\kappa=1}^{\infty} \frac{\sqrt{a_\kappa}}{\kappa}$ συγκλίνει

$$S_n = \sum_{\kappa=1}^{n} \frac{\sqrt{a_\kappa}}{\kappa} \leq \sum \sqrt{a_\kappa} \cdot \frac{1}{\kappa}$$

$$S_n \leq \left[\sum_{\kappa=1}^{n} (\sqrt{a_\kappa})^2\right]^{1/2} = \left[\sum_{\kappa=1}^{n} \frac{1}{\kappa^2}\right] \leq \left[\sum_{\kappa=1}^{n} a_\kappa\right]^{1/2} \cdot$$

$$\cdot \left(\sum_{\kappa=1}^{n} \frac{1}{\kappa^2}\right)^{1/2} \leq M_1^{1/2} \cdot M_1^{1/2} = M_1$$

Κριτήριο λόγου

Δίνεται: a_κ, $\kappa = 1/2 \ldots$, $a_\kappa \neq 0$ $(\forall \kappa)$

i) Αν $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \ell < 1 \Rightarrow \sum a_n$ συγκλίνει απόλυτα.

ii) Αν $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \ell > 1 \Rightarrow \sum a_n$ αποκλίνει

iii) Αν $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \ell = 1 \Rightarrow$ Δεν μπορούμε να ξέρουμε.

$a_n = \dfrac{1}{n}$, $b_n = \dfrac{1}{n^2}$ $\left|\dfrac{b_{n+1}}{b_n}\right| = \dfrac{n^2}{(n+1)^2} \to 1$ Αλλά η $\sum \frac{1}{n^2}$ συγκλίνει.